

Indice

INTRODUZIONE	7
• TRASFORMAZIONI CANONICHE	9
Esercizio n. 1 - Studio dell'oscillatore armonico basato sull'uso della funzione generatrice	
$F_1 = (1/2)m\omega q^2 \cotg Q$	9
Soluzione alternativa.....	10
1ª Verifica	12
2ª Verifica	13
Esercizio n. 2 – Studio dell'oscillatore armonico basato sull'uso della funzione generatrice	
$F_1 = -(m/2)\omega q^2 Q$	14
1ª Verifica	14
2ª Verifica	15
Soluzione alternativa.....	15
Esercizio n.3 - Studio dell'oscillatore armonico basato sull'uso della funzione generatrice	
$F_1 = m\omega q Q$	17
Soluzione alternativa.....	17
Esercizio n.4 - Studio dell'oscillatore armonico basato sull'uso della funzione generatrice	
$F_1 = m\omega \sqrt{q} Q$	19
Soluzione alternativa n.1.....	20
Soluzione alternativa n.2.....	22
Esercizio n.5 – Si dimostra col “metodo tradizionale” che la trasformazione $P = pq^2$, $Q = qp^2$ non è canonica.....	24
Soluzione alternativa.....	25
Esercizio n.6 – Si dimostra col “metodo tradizionale” che la trasformazione $P = p^2$, $Q = q$ è canonica rispetto all'hamiltoniano $H_1 = p^2/2$ ma non è canonica rispetto all'hamiltoniano $H_2 = qp^2/2$	26
Soluzione alternativa.....	28
Esercizio n.7 – Si dimostra col “metodo tradizionale” che la trasformazione $P = pt$, $Q = qt$ non è canonica rispetto all'hamiltoniano $H = p^2/2$	29
Soluzione alternativa n.1.....	30
Soluzione alternativa n.2.....	31
Soluzione alternativa n.3.....	31
Esercizio n.8 – Si dimostra che la trasformazione $P = ap + bq$, $Q = ep + fq$ è canonica rispetto all'hamiltoniano $H = p^2/2$	33
Soluzione alternativa n.1.....	34
Soluzione alternativa n.2.....	34
Esercizio n.9 – Si dimostra che la trasformazione $P = p \cos q$, $Q = p \sin q$ è canonica rispetto all'hamiltoniano $H_1 = p^2/2$ ma non è canonica rispetto all'hamiltoniano $H_2 = p^2/2m + mgq$	36

Esercizio n.10 - Si dimostra che la trasformazione $Q = p + q$, $P = q$ è canonica rispetto all'hamiltoniano $H = (q^2 + p^2)/2$	38
Esercizio n.11 - Si dimostra che la trasformazione $Q = p + q$, $P = q$ è canonica rispetto all'hamiltoniano $H = p^2/2 + q$	40
Soluzione alternativa.....	41
Esercizio n.12 - Viene costruita la funzione generatrice della trasformazione $Q = \ln(1 + \sqrt{q} \cos p)$, $P = 2(1 + \sqrt{q} \cos p)\sqrt{q} \sin p$	42
Soluzione alternativa.....	43
Esercizio n.13 - Si dimostra che la trasformazione $Q = (q + ip)\sqrt{2}/2$, $P = i(q - ip)\sqrt{2}/2$ è canonica rispetto all'hamiltoniano dell'oscillatore armonico $H = (p^2 + q^2)/2$ ($m=k=1$).....	45
Soluzione alternativa.....	47
Esercizio n.14 - Si dimostra che la trasformazione $Q_i = \alpha q_i$, $P_i = \beta p_i$ è canonica.....	48
Soluzione alternativa n.1.....	49
Soluzione alternativa n.2.....	50
Soluzione alternativa n.3.....	50
Soluzione particolare n.1 (rispetto all'hamiltoniano $H = p^2/2$).....	51
Soluzione particolare n.2 (rispetto all'hamiltoniano $H = (p^2 + q^2)/2$).....	52
Esercizio n.15 - Si dimostra la canonicità della trasformazione $Q_i = \alpha p_i$, $P_i = \beta q_i$	54
Soluzione alternativa n.1.....	55
Soluzione alternativa n.2.....	55
Soluzione alternativa n.3.....	Errore. Il segnalibro non è definito.
Soluzione particolare (rispetto all'hamiltoniano $H = p^2/2$).....	57
Esercizio n.16 - Si dimostra che la trasformazione $Q_i = p_i t g t$, $P_i = q_i \cot g t$ è canonica.....	59
Soluzione alternativa n.1.....	60
Soluzione alternativa n.2.....	60
Soluzione alternativa n.3.....	61
Soluzione particolare (rispetto all'hamiltoniano $H = p^2/2$).....	62
Esercizio n.17 - a) Assegnata la funzione generatrice $F_2(q, P) = kqP$ viene definita la trasformazione canonica associata; b) Data la funzione generatrice $F_1(q, Q) = qQ$ viene definita la trasformazione canonica associata; c) Viene determinata la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice $F_2(q, P, t) = \psi(q, t)P$	64
Esercizio n.18 - Si dimostra che la trasformazione $p = P + a$, $q = Q + b$ è una trasformazione canonica e si determina il nuovo hamiltoniano $\mathcal{H}(P, Q)$ e la funzione generatrice.....	66
Soluzione alternativa n.1.....	66
Soluzione alternativa n.2.....	66
Soluzione alternativa n.3.....	67
Esercizio n.19 - Seguendo un approccio tradizionale, si dimostra che la trasformazione $p = P$, $q = Q + bt$ è una trasformazione canonica	69
Soluzione alternativa n.1.....	69
Soluzione alternativa n.2.....	70

Esercizio n.20 - Si dimostra la canonicità della trasformazione $p = P, q = Q + \alpha Pt$ seguendo un approccio tradizionale.....	72
Soluzione alternativa n.1.....	73
Soluzione alternativa n.2.....	73
Soluzione alternativa n.3.....	76
Esercizio n.21 – Si verifica che la trasformazione $p = A^{-T}P, q = AQ$ (con A una matrice generica) è una trasformazione canonica	77
Soluzione alternativa.....	77
Esercizio n.22 – Si dimostra che la trasformazione $q = \sqrt{2P/m\omega}, p = -\sqrt{2m\omega P} Q$ è una trasformazione canonica	78
Soluzione alternativa.....	78
Esercizio n.23 – Si dimostra la canonicità della trasformazione $p = m\omega Q, q = -P/m\omega$	82
Soluzione alternativa n.1.....	82
Soluzione alternativa n.2.....	83
Esercizio n.24 – Si dimostra la canonicità della trasformazione $Q = 2p\sqrt{q}/m\omega, P = -m\omega\sqrt{q}$	85
Soluzione alternativa n.1.....	85
Soluzione alternativa n.2.....	87
Esercizio n.25 – Si verifica che la trasformazione $P = p - q, Q = (p + q)/2$ è una trasformazione canonica	89
Soluzione alternativa n.1.....	89
Soluzione alternativa n.2.....	90
Esercizio n.26 – Si dimostra che, data una qualsiasi funzione differenziabile $f(t)$ mai nulla, esiste una funzione $g(t)$ con le stesse proprietà tale che la trasformazione $P = f(t) q, Q = g(t) p$ risulta canonica	93
Soluzione alternativa n.1.....	93
Soluzione alternativa n.2.....	94
Esercizio n.27 – Si analizza la trasformazione $P = (p^2 + q^2)/2\omega, Q = \arctg \omega q/p$ per stabilire se si tratta di una trasformazione canonica	96
Esercizio n.28 – Si studia la trasformazione $P = (p^2 + \omega^2 q^2)/2\omega, Q = \arctg \omega q/p$ per stabilire se si tratta di una trasformazione canonica	97
Soluzione alternativa n.1.....	97
Soluzione alternativa n.2.....	98
Esercizio n.29 – Si analizza la trasformazione $P = (p^2 + q^2)/2, Q = \arctg(q/p)$ per stabilire la sua eventuale canonicità.....	100
Soluzione alternativa n.1.....	100
Soluzione alternativa n.2.....	101
Soluzione alternativa n.3.....	101

Esercizio n.30 – Si studia la trasformazione $P = \sqrt{(p^2 + q^2)/2}$, $Q = \arctg(q/p)$ per verificare la sua eventuale canonicità.....	104
Soluzione alternativa n.1.....	105
Soluzione alternativa n.2.....	106
Esercizio n.31 – 1. Si dimostra che esistono trasformazioni che sono canoniche rispetto ad un hamiltoniano ma non lo sono rispetto ad un diverso hamiltoniano, e quindi non sono canoniche in generale. 2. Si dimostra che le “funzioni inverse” del caso precedente continuano a non essere canoniche in generale, ed inoltre esse non sono canoniche rispetto all’hamiltoniano nei riguardi del quale risultano canoniche le trasformazioni del caso 1.....	
	107
Esercizio n.32 – Si verifica la canonicità della trasformazione $p = \sqrt{2\omega P} \cos Q$, $q = \sqrt{2P/\omega} \sin Q$	110
Soluzione alternativa n.1.....	110
Soluzione alternativa n.2.....	111
Soluzione alternativa n.3.....	112
Esercizio n.33 – Si analizza la trasformazione $Q = \ln[(1/q)\sin p]$, $P = qcotg p$ per verificare la sua canonicità.....	114
Soluzione alternativa n.1.....	114
Soluzione alternativa n.2.....	115
Esercizio n.34 – Si analizza la trasformazione $p = m\omega qcotg Q$, $P = m\omega q^2/2 \sin^2 Q$ per verificare la sua canonicità.....	117
Soluzione alternativa n.1.....	117
Soluzione alternativa n.2.....	118
Esercizio n.35 – Si dimostra che le trasformazioni $Q_1 = 1/\sqrt{2} (q_1 + p_2/m\omega)$, $P_1 = 1/\sqrt{2} (p_1 - m\omega q_2)$, $Q_2 = 1/\sqrt{2} (q_1 - p_2/m\omega)$, $P_2 = 1/\sqrt{2} (p_1 + m\omega q_2)$ sono canoniche.....	120
Esercizio n.36 – Si determinano i valori dei parametri a e b che rendono canoniche le trasformazioni $q_1 = P_1 + 2Q_1 + P_2 + aQ_2$, $p_1 = P_1 + Q_1$; $q_2 = P_2 + bQ_2 + P_1 + Q_1$, $p_2 = P_2 + 2Q_2$	122
Esercizio n.37 – Si studia la trasformazione $Q = \sqrt{q} \cos 2p$, $P = \sqrt{q} \sin 2p$ per stabilire se è una trasformazione canonica.....	124
Soluzione alternativa.....	124
Esercizio n.38 – Si determinano i valori dei parametri a e b che rendono canonica la trasformazione $Q = \sqrt{p} e^{aq}$, $P = -p^b e^q$	126
Soluzione alternativa.....	126
Esercizio n.39 – Si individuano i valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ che rendono la trasformazione $p = \delta P^\gamma \cos^\alpha Q$, $q = \delta P^\gamma \sin^\beta Q$ canonica.....	128
Soluzione alternativa.....	128
Esercizio n.40 – Si determinano i valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ che rendono la trasformazione $p = \delta P^\gamma \sin^\alpha Q$, $q = P^\gamma \cos^\beta Q$ canonica.....	130

Soluzione alternativa.....	130
Esercizio n.41 – Si individuano i valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ che rendono canonica la trasformazione $p = P^\alpha \sin^\gamma Q, q = \delta P^\beta \cos^\gamma Q$	132
Soluzione alternativa.....	132
Esercizio n.42 – Si esamina la trasformazione $p = h P^\alpha e^{-\beta Q}, q = h P^\gamma e^{\delta Q}$ e si determinano i valori dei parametri $h, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ che la rendono canonica	134
Soluzione alternativa.....	134
Esercizio n.43 – Si analizza la trasformazione $p = h P^\alpha \cos Q, q = k P^\beta \sin Q$ e si individuano i valori dei parametri h, k, α, β che la rendono canonica.....	136
Soluzione alternativa.....	136
Esercizio n.44 – Si studia la trasformazione $p = h P e^{-\beta Q}, q = h e^{\beta Q}$ e si determinano i valori dei parametri h e β che la rendono canonica	138
Soluzione alternativa.....	138
Esercizio n.45 – Data la trasformazione $p = h P^\alpha e^{\beta Q}, q = k P^\alpha e^\gamma Q$, si determinano i valori dei parametri h, k, α, β , e γ che la rendono strettamente canonica.....	140
Soluzione alternativa.....	140
Esercizio n.46 – Si analizza la trasformazione $p = k P^\alpha e^\gamma Q, q = k P^\beta e^{-\gamma Q}$ e si individuano i valori dei parametri k, α, β , e γ che la rendono canonica.....	142
Soluzione alternativa.....	142
Esercizio n.47 – Si studia la trasformazione $p = h P^\alpha \cos^\beta Q, q = k P^\alpha \sin^\beta Q$ e si determinano i valori dei parametri h, k, α, β che la rendono canonica	144
Soluzione alternativa.....	144
Esercizio n.48 – Assegnata la trasformazione $p = h P^\alpha e^{-\beta Q}, q = h P^\gamma e^{\beta Q}$ si individuano i valori dei parametri h, α, β, γ che la rendono canonica	146
Soluzione alternativa.....	146
Esercizio n.49 – Si determinano i valori dei parametri h, k, α, β e γ che rendono canonica la trasformazione $p = h P^\alpha \cos^\beta Q, q = k P^\alpha \sin^\gamma Q$	148
Soluzione alternativa.....	148
Esercizio n.50 – Si analizza la trasformazione $Q = \sqrt{2q} e^\alpha \cos p, P = \sqrt{2q} e^{-\alpha} \sin p$ e si determina il valore del parametro α che la rende canonica.....	150
Soluzione alternativa n. 1.....	150
Soluzione alternativa n.2.....	151
Esercizio n.51 – Data la trasformazione $Q = q^\alpha \cos^\beta p, P = q^\alpha \sin^\beta p$ si individuano i valori dei parametri α e β che la rendono canonica	153
Soluzione alternativa.....	153

APPENDICE N. 1 – Si studia il moto di una particella soggetta a forze dotate di potenziale e si scrivono il lagrangiano e l'hamiltoniano, con le relative equazioni del moto, rispetto a varie terne di riferimento

.....	155
1) Coordinate cartesiane.....	155
2) Coordinate cartesiane ruotate intorno all'asse z.....	156
3) Coordinate oblique	156
4) Coordinate cilindriche.....	158
5) Coordinate sferiche.....	160
6) Coordinate cartesiane ruotanti	161

APPENDICE N. 2 – Si assume come funzione generatrice la $F_2 = f_i(q_j, t)P_i$ e si fa vedere che le trasformazioni (2.1), (3.1), (4.1), (5.1) e (6.1) dell'appendice precedente soddisfano l'equazione $p_i \dot{q}_i - H = -Q_i \dot{P}_i - \mathcal{H} + dF_2/dt$ o alternativamente l'equazione $p_i dq_i - H dt = -Q_i dP_i - \mathcal{H} dt + dF_2$ e pertanto sono trasformazioni canoniche

.....	165
1) Coordinate cartesiane ruotate intorno all'asse z.....	165
2) Coordinate oblique	166
3) Coordinate cilindriche.....	167
4) Coordinate sferiche.....	167
5) Coordinate cartesiane ruotanti	168